Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 1

Martes 10 de mayo de 2016 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[120 puntos]**.

2216 – 7225

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

El siguiente sistema de ecuaciones representa tres planos en el espacio.

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= -1 \\ x + 2y - 2z &= 15 \\ 2x + y - z &= 6 \end{aligned}$$

Halle las coordenadas del punto de intersección de los tres planos.

2. [Puntuación máxima: 5]

La función f se define mediante $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$.

Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas que haya y sus ecuaciones, y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Puntuación máxima: 5]

(a) Muestre que $\text{cotan}\,\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. [1]

(b) A partir de lo anterior, halle $\int_{\tan\alpha}^{\text{cotan}\,\alpha} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. [4]

4. [Puntuación máxima: 6]

La función f viene dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

Hayley formula la siguiente conjetura: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f'(x_2) + f'(x_1)}{2}$, $x_1 \neq x_2$.

Muestre que la conjetura de Hayley es correcta.

5. [Puntuación máxima: 8]

Una moneda no equilibrada se lanza al aire cinco veces. En cada lanzamiento, la probabilidad de que salga cara es igual a p.

Sea X el número de veces que sale cara.

(a) Halle, en función de p, una expresión para $\mathrm{P}(X=4)$. [2]

(b) (i) Determine el valor de p para el cual $\mathrm{P}(X=4)$ alcanza un valor máximo.

(ii) Para este valor de p, determine el número esperado de veces que sale cara. [6]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Puntuación máxima: 8]

Considere el desarrollo de $(1+x)^n$ en potencias ascendentes de x, donde $n \geq 3$.

(a) Escriba los cuatro primeros términos del desarrollo. [2]

Los coeficientes de los términos segundo, tercero y cuarto del desarrollo son términos consecutivos de una progresión aritmética.

(b) (i) Muestre que $n^3 - 9n^2 + 14n = 0$.

(ii) A partir de lo anterior, halle el valor de n. [6]

7. [Puntuación máxima: 6]

A y B son sucesos independientes tales que $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = p$, $p \neq 0$.

(a) Muestre que $\mathrm{P}(A \cup B) = 2p - p^2$. [2]

(b) Halle $\mathrm{P}(A \mid A \cup B)$ en su forma más simple. [4]

8. [Puntuación máxima: 8]

Utilice la inducción matemática para demostrar que $n\left(n^2+5\right)$ es divisible entre 6 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

9. [Puntuación máxima: 8]

Considere la ecuación $\frac{\sqrt{3}-1}{\operatorname{sen} x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$. Sabiendo que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ y que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(a) verifique que $x=\frac{\pi}{12}$ es una solución de la ecuación; [3]

(b) a partir de lo anterior, halle la otra solución de la ecuación para $0<x<\frac{\pi}{2}$. [5]

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 18]

Una recta L tiene por ecuación $\frac{x-2}{p} = \frac{y-q}{2} = z-1$, donde $p, q \in \mathbb{R}$.

Un plano Π tiene por ecuación $x + y + 3z = 9$.

(a) Muestre que L no es perpendicular a Π. [3]

(b) Sabiendo que L está contenida en el plano Π, halle el valor de p y el valor de q. [4]

Considere ahora un caso distinto, en el que L y Π forman un ángulo agudo θ, donde $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

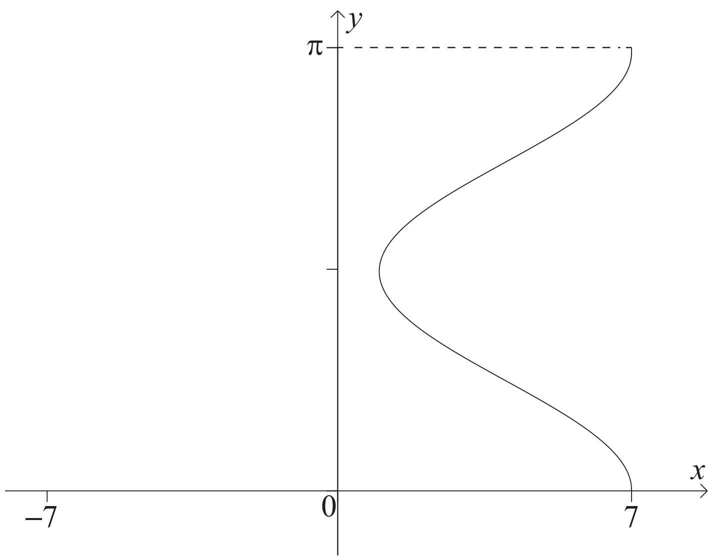
(c) (i) Muestre que $p = -2$.

(ii) Si L y Π se cortan en $z = -1$, halle el valor de q. [11]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 19]

El siguiente gráfico muestra la relación $x = 3\cos 2y + 4$, $0 \le y \le \pi$.



La curva se rota $360°$ alrededor del eje y para así generar el volumen de revolución.

(a) Calcule el valor del volumen generado. [8]

Se fabrica un contenedor que tiene esta forma, con una base sólida de $14\,\text{cm}$ de diámetro. El contenedor se va llenando de agua a razón de $2\,\text{cm}^3\,\text{min}^{-1}$. En el tiempo *t* minutos, la profundidad del agua es igual a $h\,\text{cm}$, $0 \le h \le \pi$, y el volumen del agua en el contendor es $V\text{cm}^3$.

(b) (i) Sabiendo que $\frac{\text{d}V}{\text{d}h} = \pi(3\cos 2h + 4)^2$, halle una expresión para $\frac{\text{d}h}{\text{d}t}$.

(ii) Halle el valor de $\frac{\text{d}h}{\text{d}t}$ cuando $h = \frac{\pi}{4}$. [4]

(c) (i) Halle $\frac{\text{d}^2h}{\text{d}t^2}$.

(ii) Halle los valores de h para los cuales $\frac{\text{d}^2h}{\text{d}t^2} = 0$.

(iii) Haciendo referencia explícita a la forma del contenedor, interprete $\frac{\text{d}h}{\text{d}t}$ en los valores de h que ha hallado en el apartado (c)(ii). [7]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 23]

Sea $w = \cos\frac{2\pi}{7} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{7}$.

(a) Verifique que w es una raíz de la ecuación $z^7 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$. [3]

(b) (i) Desarrolle $(w-1)\left(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6\right)$.

(ii) A partir de lo anterior, deduzca que $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 0$. [3]

(c) Escriba las raíces de la ecuación $z^7 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$ en función de w y sitúe estas raíces en un diagrama de Argand. [3]

Considere la ecuación cuadrática $z^2 + bz + c = 0$, donde $b, c \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Las raíces de esta ecuación son α y α^* donde α^* es el número complejo conjugado de α.

(d) (i) Sabiendo que $\alpha = w + w^2 + w^4$, muestre que $\alpha^* = w^6 + w^5 + w^3$.

(ii) Halle el valor de b y el valor de c. [10]

(e) Utilizando los valores de b y c que ha obtenido en el apartado (d)(ii), halle la parte imaginaria de α en forma de radical irracional. [4]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.